El mayor matemático de la Edad Media .

Leonardo Fibonacci, llamado Leonardo de pisa (1170-1240), fue el más importante matemático europeo de la Edad Media. Revivió las matemáticas antiguas y realizó importantes contribuciones propias, especialmente a la aritmética, al álgebra y a la geometría.

Nació en Italia, pero fue educado en África del Norte donde su padre desempeñaba un cargo diplomático.

Recibió una muy buena instrucción y viajaba mucho por negocios a Argelia, Egipto, Siria, Grecia y Sicilia, de donde trajo numerosos escritos de matemática. De regreso a Pisa en 1202, convencido de la superioridad de los métodos indoárabes de cálculo (el sistema decimal y el cero), redactó un tratado para darlos a conocer en su libro publicado con el nombre de "Liber abaci", el que permite la introducción de los números de Fibonacci y la serie de este gran matemático de la Edad Media por las cuales es recordado hoy en día.

Sin embargo, su obra, difícil y muy avanzada sobre los conocimientos de sus contemporáneos, fue poco utilizada en la época.

Sucesión de números Fibonacci.

Se construye de la siguiente manera:

a) La sucesión empieza con dos unos.
b) Cualquier término de la sucesión se obtiene de sumar los dos anteriores.
c) La sucesión es infinita

Ejemplo:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229…

Respondiendo a la fórmula:

$$\mathbf{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$$

Antes de que Fibonacci escribiera su trabajo, la sucesión de los números de Fibonacci había sido descubierta por matemáticos hindúes tales como Gopala (antes de 1135) y Hemachandra (c. 1150), quienes habían investigado los patrones rítmicos que se formaban con sílabas o notas de uno o dos pulsos. El número de tales ritmos (teniendo juntos una cantidad n de pulsos) era f_{n+1}, que produce explícitamente los números 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.

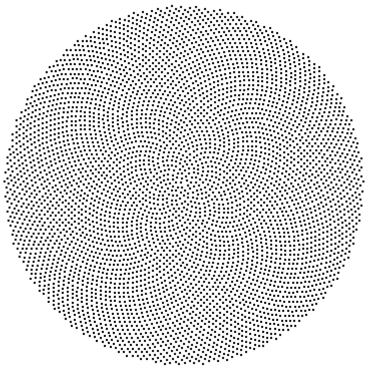
"Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

Fibonacci

La sucesión de Fibonacci, el número áureo y la sección áurea en la naturaleza.

Para que las hojas esparcidas de una planta o las ramas alrededor del tronco tengan el máximo de insolación con la mínima interferencia entre ellas, éstas deben crecer separadas en hélice ascendente según un ángulo constante y teóricamente igual a 360º (2 - ϕ) ≈ 137º 30' 27,950 580 136 276 726 855 462 662 132 999..." En la naturaleza se medirá un ángulo práctico de 137º 30' o de 137º 30' 28" en el mejor de los casos. Para el cálculo se considera iluminación vertical y el criterio matemático es que las proyecciones horizontales de unas sobre otras no se recubran exactamente. Aunque la iluminación del Sol no es, en general, vertical y varía con la latitud y las estaciones, esto garantiza el máximo aprovechamiento de la luz solar. Este hecho fue descubierto empíricamente por Church y confirmado matemáticamente por Weisner en 1875. La letra griega ϕ representa al número áureo. En la práctica no puede medirse con tanta precisión el ángulo y las plantas lo reproducen "orgánicamente"; o sea, con un error pequeño, pero existente.

En la cantidad de elementos constituyentes de las espirales o dobles espirales de las inflorescencias, como en el caso del girasol, y en otros objetos orgánicos como las piñas de los pinos se encuentran números pertenecientes a la sucesión de Fibonacci.



Disposición de Fibonacci de las semillas del girasol

El número áureo o de oro (también llamado número dorado, sección áurea, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción) representado por la letra griega ϕ (fi) (en honor al escultor griego Fidias), es el número irracional:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988\,749\,894\,848\,204\,586\,834\,365\,638\ \ldots$$

Se trata de un número algebraico que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como “unidad” sino como relación o proporción. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la

"Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

Fibonacci

naturaleza en elementos tales como caracolas, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, etc.

Así mismo, se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea, así como una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido objetables para las matemáticas y la arqueología.

Se dice que dos números positivos a y b están en razón áurea si y sólo si:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Para obtener el valor de φ a partir de esta razón considere lo siguiente:

Que la longitud del segmento más corto b sea 1 y que la de a sea x. Para que estos segmentos cumplan con la razón áurea deben cumplir que:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

Multiplicando ambos lados por x y reordenando:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Mediante la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado se obtiene que las dos soluciones de la ecuación son

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1,61803$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \approx -0,61803$$

La solución positiva es el valor del número áureo, y esto es una prueba formal de que el número áureo es irracional, ya que incluye la raíz de un número primo.

"Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

Fibonacci

El número áureo en las Matemáticas

Propiedades algebraicas

- Φ es el único número real positivo tal que:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

La expresión anterior es fácil de comprobar:

$$\varphi^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{2^2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\varphi + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

- Φ posee además las siguientes propiedades:

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$
$$\varphi^3 = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}$$

- Las potencias del número áureo pueden ser escritas en función de una suma de potencias de grados inferiores del mismo número, estableciendo una verdadera sucesión recurrente de potencias.

El caso más simple es: $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, cualquiera sea n entero positivo. Este caso es una sucesión recurrente de orden k = 2, pues se recurre a dos potencias anteriores.

Una ecuación recurrente de orden k tiene la forma $a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n$, donde a_i es cualquier número real o complejo y k es un número natural menor o igual a n y mayor o igual a 1. En el caso anterior es k = 2, $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

Pero podemos «saltear» la potencia inmediatamente anterior y escribir:

$\Phi^n = \Phi^{n-2} + 2\Phi^{n-3} + \Phi^{n-4}$. Aquí k = 4, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ y $a_4 = 1$.

Si anulamos a las dos potencias inmediatamente anteriores, también hay una fórmula recurrente de orden 6:

$\Phi^n = \Phi^{n-3} + 3\Phi^{n-4} + 3\Phi^{n-5} + \Phi^{n-6}$

En general:

"Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

Fibonacci

$$\Phi^n = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}k} \binom{\frac{1}{2}k}{i} \Phi^{n - \left(\frac{1}{2}k + i\right)}$$; $k \in \mathbb{N}$, k un número par, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$.

En resumen: cualquier potencia del número áureo puede ser considerada como el elemento de una sucesión recurrente de órdenes 2, 4, 6, 8, ..., 2n; donde n es un número natural. En la fórmula recurrente es posible que aparezcan potencias negativas de Φ, hecho totalmente correcto. Además, una potencia negativa de Φ corresponde a una potencia positiva de su inverso, la sección áurea.

Este curioso conjunto de propiedades y el hecho de que los coeficientes significativos sean los del binomio, parecieran indicar que entre el número áureo y el número e hay un parentesco.

- El número áureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ es la unidad fundamental «ε» del cuerpo $\mathbb{R}\left(\sqrt{5}\right)$ y la sección áurea $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es su inversa, «ε^{-1}». En esta extensión el «emblemático» número irracional $\sqrt{2}$cumple las siguientes igualdades:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

Representación mediante fracciones continuas.

La expresión mediante fracciones continuas es:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Esta iteración es la única donde sumar es multiplicar y restar es dividir. Es también la más simple de todas las fracciones continuas y la que tiene la convergencia más lenta. Esa propiedad hace que además el número aúreo sea un número mal aproximable mediante racionales que de hecho alcanza el peor grado de aproximabilidad mediante racionales posible.

"Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

Fibonacci

El número áureo en la geometría.

El número áureo y la sección áurea están presentes en todos los objetos geométricos regulares o semiregulares en los que haya simetría pentagonal, pentágonos o aparezca de alguna manera la raíz cuadrada de cinco.

- Relaciones entre las partes del pentágono.
- Relaciones entre las partes del pentágono estrellado, pentáculo o pentagrama.
- Relaciones entre las partes del decágono.
- Relaciones entre las partes del dodecaedro y del icosaedro

"Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

Fibonacci