El método de inducción:

Números de Fibonacci

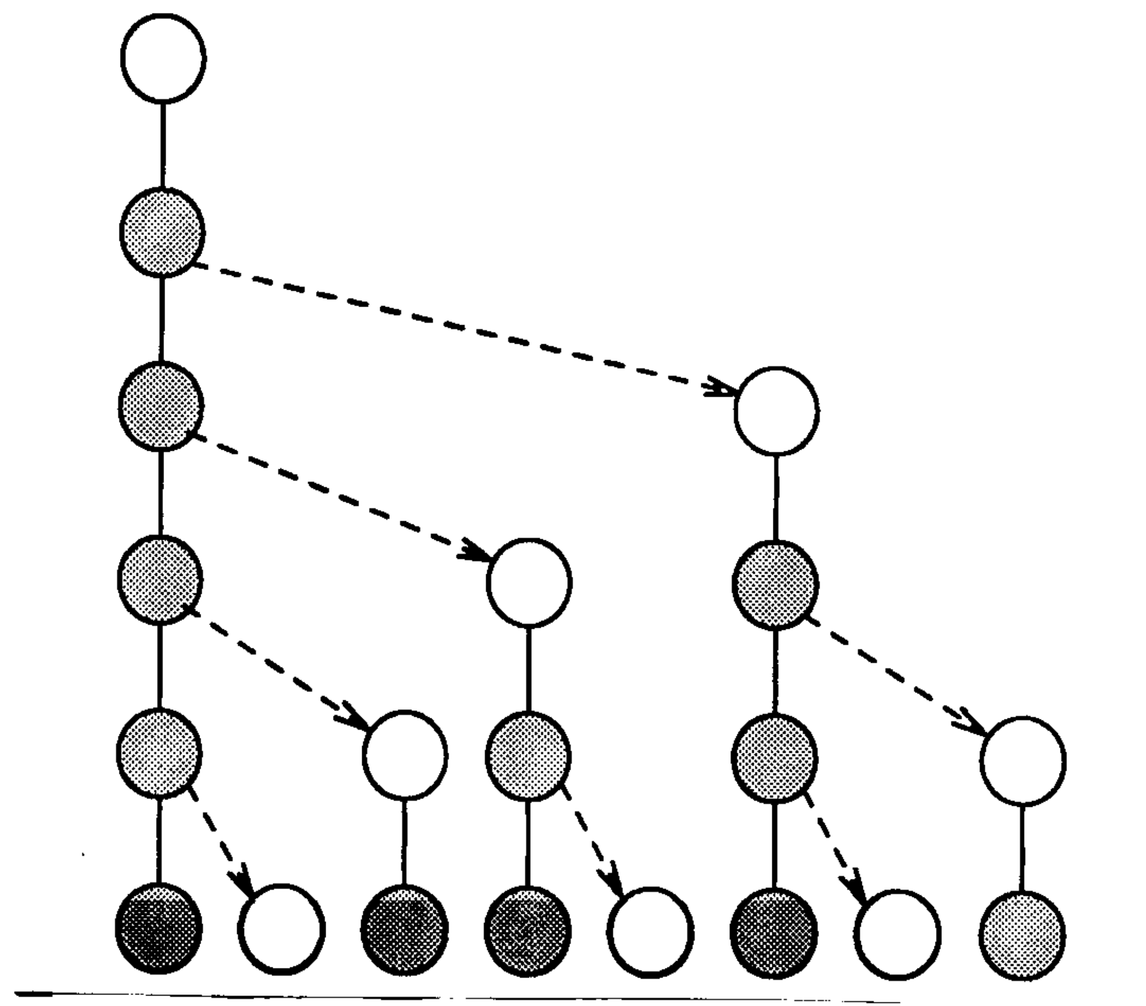
F. Bellot Rosado

Los números de Fibonacci

En 1202 Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, publicó en Pisa el *Liber Abaci*, una notable recopilación de problemas, donde está incluído éste, relacionado con la reproducción de los conejos.

Supongamos que tenemos una pareja de conejos (macho y hembra), que están en el primer mes desde su nacimiento y son inmaduros ; tardan un mes en ser maduros y poder reproducirse. Pero a partir del momento en que son maduros, dan nacimiento cada mes a una pareja de conejos (macho y hembra), con los que se repite la situación. ¿Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de doce meses?

En la figura siguiente, la pareja de conejos inmaduros se representa por un círculo blanco, y la de maduros por uno gris. Así se tienen las primeras generaciones de conejos :



Contando los círculos, obtenemos la sucesión numérica

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$$

que recibe el nombre de sucesión de Fibonacci y se representa por

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_4 = 8, \cdots$$

donde cada término es igual a la suma de los dos anteriores :

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

Con esto estamos en condiciones de calcular F_{12}, que es lo que preguntaba el problema de Fibonacci. Por ahora no nos plantearemos la obtención de una fórmula ”cerrada” para F_n en función de n.

Veamos algunas otras propiedades de los números de Fibonacci.

Examinemos el producto de F_n y F_{n+1} para los primeros valores de n :

n	$F_{n-1}F_{n+1}$
2	$1 \times 2 = 2$
3	$1 \times 3 = 3$
4	$2 \times 5 = 10$
5	$3 \times 8 = 24$
6	$5 \times 13 = 65$
7	$8 \times 21 = 168$
8	$13 \times 34 = 442$
9	$21 \times 55 = 1155$
10	$34 \times 89 = 3026$

A primera vista no parece haber ninguna regularidad aquí. Pero fijándonos algo más, observamos que algunos valores de la tabla están próximos a cuadrados de números enteros: 24 y 25 = 5^2, 65 y $64 = 8^2$,

168 y $169 = 13^2$. ¡Pero 5, 8 y 13 son términos de la sucesión de Fibonacci! Calculando algo más, $21^2 = 441, 34^2 = 1156$.

Entonces formamos una nueva tabla :

F. Bellot Rosado

n	$F_{n-1}F_{n+1}$	F_n^2	$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$
2	$1 \times 2 = 2$	1	$+1$
3	$1 \times 3 = 3$	4	-1
4	$2 \times 5 = 10$	9	$+1$
5	$3 \times 8 = 24$	25	-1
6	$5 \times 13 = 65$	64	$+1$
7	$8 \times 21 = 168$	169	-1
8	$13 \times 34 = 442$	441	$+1$
9	$21 \times 55 = 1155$	1156	-1
10	$34 \times 89 = 3026$	3025	$+1$

Por lo tanto, la conjetura es

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

cuya validez para los primeros valores de n (desde $n = 2$) está justificada por la tabla. Supongamos que

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$$

y veamos cómo se puede demostrar que

$$F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}\,.$$

Aunque no sea obvio por qué se eligen las sustituciones que siguen, el fin último se alcanza:

$$\begin{aligned}
F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k\left(F_{k+1} + F_k\right) - F_{k+1}\left(F_k + F_{k-1}\right) \\
&= F_k F_{k+1} + F_k^2 - F_{k+1} F_k - F_{k+1} F_{k-1} \\
&= F_k^2 - F_{k-1} F_{k+1} \\
&= (-1)(F_{k-1} F_{k+1} - F_k^2) \\
&= (-1)(-1)^k \\
&= (-1)^{k+1}\,.
\end{aligned}$$

Volver al método de inducción
Torres de Hanoi
Una desigualdad