

# L O G I C A P R O P O S I C I O N A L

## Introducción

Podemos considerar la **lógica** como ciencia y técnica a la vez. Técnica porque está relacionada con la destreza para interpretar el razonamiento correcto y criticar el razonamiento incorrecto y **ciencia** porque investiga, desarro-

lla y establece los principios fundamentales y provee los métodos para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto.

**Razonar** es un proceso mental mediante el cual se llega a establecer una conclusión, que se basa en una o mas proposiciones supuestas o aceptadas

previamente llamadas premisas,( postulados, axiomas) que constituyen el punto

de partida del proceso.

En general, la ciencia de la lógica se interesa por las relaciones legítimas que puedan encontrarse entre proposiciones supuestas o aceptadas y otras inferidas como conclusiones de las primeras. Las posibilidades que ofrece la lógica es que partiendo de verdades se pueden obtener nuevas verdades.

Sólo estudiaremos la lógica relativa a las proposiciones y por tal motivo, este tema, recibe el nombre de **Lógica Proposicional**, y distinguiremos dos tipos de

valores de verdad, que anotamos **V** o **F**, o bien, **1** ó **0**.

### Definición

Una **proposición** u **oración declarativa**, es una frase del lenguaje usual a la cual

se le puede asignar un **valor de verdad ( V o F )** sin ambigüedad. Las anotaremos

con las letras **p, q, r, s, .....**, etc.

Para poder decidir si estamos frente a una proposición, basta preguntar

¿ Es verdadero o falso que ..... ?

Ejemplos:

- a )  $0 < 1$  es una proposición verdadera
- b ) ¿ Qué hora es ? no es proposición
- c )  $2 + 3 = 6$  es una proposición falsa
- d ) Verde no es proposición
- e ) ¡ Uf, qué calor ! no es proposición
- f ) Los gatos ladran de noche es proposición falsa
- g )  $2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^6 \cdot 2^1 = 2^0$  es una proposición falsa
- h )  $(2 + b)^2 = 4 + b^2$  es una proposición falsa
- i )  $\sqrt[3]{a^4 + b^4} = a + b$  es una proposición falsa
- j ) ¡ No ! no es proposición

### Ejercicio 1.-

1.- Indique cual de las siguientes oraciones son proposiciones

- a.- Ud. está haciendo un curso de matemática .....
- b.- El dijo la verdad. ....
- c.- ¡Me duele mucho la cabeza! .....
- d.- Si llueve, me resfrío .....
- e.- La Lógica es ciencia exacta. ....
  
- f ) ¿ Que pasó ? .....
- g ) Ruanda es un país caribeño .....
- h ) Carlos Fuentes es un músico mexicano .....
- j ) Cincuenta .....
- k ) Hugo Chavez es Presidente de Venezuela .....
- l ) Camilo Cela es Premio Nobel de Literatura .....
- m) ¡ Ay ! .....
- n)  $(\mathbb{Z}; *)$  Es grupo abeliano .....
- ñ ) No sé si vendrá .....
- o ) 51 es un número primo .....
- p ) Misa en Re - mayor de Mozart .....
- q)  $24 = 8$  .....
- r) Ayer .....
- s) Thomas Mahn es un escritor Inglés .....

2.- Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

- a) 1 en un número primo .....
- b)  $[a + b]^2 = a^2 + b^2$  .....
- c) " La Ciudad y los Perros " es una obra de Mario Vargas Llosa. ....
- d)  $0^0 = 1$  .....
- e) 1001 es un número primo .....
- f) "L a Coral" es una de las nueve sinfonías de Beethoven .....
- g) Haver está bién escrito .....
- h) J. M. Balmaceda fue un Presidente de Chile .....
- i)  $a^{1200} = 0$  .....
- j)  $- 8 > - 2$  .....
- l) El lago O´ Higgins está en la X región .....
- m) 5 es múltiplo de 1 .....
- n) Todos los números distintos de 0 dividen al 1 .....
- ñ )  $- 2^4 = 16$  .....
- o)  $2x + 1 = 4$  no tiene solución enterra .....

**Nota**

p
V
F

Las proposiciones las simbolizaremos con las letras minúsculas  
 $p, q, r, s, t, \dots$

**Ejemplos**

- a)  $p : 4^3 = 12$
- b)  $q : \text{Neruda fue un poeta chileno}$
- c)  $r : 2^0 = 1$
- d)  $s : \sqrt{25} = -5$
- e)  $t : \text{La ballenas son mamiferos acuáticos}$

Las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas, **no pueden** tener ambos valores de verdad a la vez, es decir

El gráfico anterior es la llamada tabla de verdad de la proposición p

**Observación**

- a) Si p es verdadero excluye el falso
- b) Si p es falso excluye el verdadero

**Definición**

Sea p una proposición entonces  $\bar{p}, \sim p$  o  $Np$   
 es la negación de la proposición p y es también una proposición.

**Ejemplo**

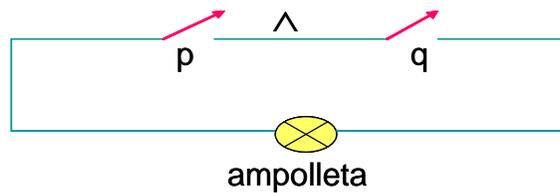
- a)  $p : 2^4 = 16 ; \sim p : 2^4 \neq 16$
- b)  $q : \text{J.P. Sastre fue un filósofo francés}$   
 $\sim q : \text{J.P. Sastre no fue un filósofo francés}$
- c)  $r : -5 \text{ es un número natural}$   
 $\sim r : -5 \text{ no es un número natural}$
- d)  $s : \text{La Habana es la capital de Cuba}$   
 $\sim s : \text{La Habana no es la capital de Cuba}$
- e)  $t : 2 > -7 ; \sim t : 2 \not> -7$

**Ejercicio 2.-**

Escriba la negación de las proposiciones del Ejercicio 1 - 2

**Proposición 1.-**

p	- p	- (- p)
V	F	V
F	V	F



Si p un proposición entonces  $\sim(\sim p) = p$

### Demostración

Las tablas de verdad de p y  $\sim(\sim p)$  son iguales

### Conectivos Lógicos

Las palabras : " y " ; " o " ; " y / o " : " si " ; " entonces " ; " sí y sólo " del lenguaje usual, sirven para unir dos o más proposiciones simples, se llaman **conectivos lógicos**. La unión de dos o mas proposiciones simples son llamadas **proposiciones compuestas** y el valor de verdad depende de las proposiciones componentes.

#### 1.- Conjunción ( $\wedge$ )

Consideremos el siguiente circuito electrico compuesto por dos interruptores ( **p** y **q** ) y una ampolleta, de modo que si éstos están cerrado sea **V** y si están abierto sea **F**.

Para que la ampolleta esté encendida, ambos interruptores deben estar cerrados y en cualquier otro caso la ampolleta estará apagada, luego, la proposición compuesta **p**  $\wedge$  **q** es verdadera si y sólo si **p** y **q** son verdaderas y la tabla de verdad está dada por:

Ejemplos

- a)  $p : \sqrt[5]{-1} = -1$  ;  $q : (-1)^6 = (-1)^{12} = 1$   
luego  
**p**  $\wedge$  **q** es V , dado que ambas proposiciones son verdaderas
- b) **r** : Roma es la capital de Francia

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$s : 0^0 = 1$

luego

$r \wedge s$  es falsa, dado que s es falsa

c)  $t$  : desolación es un poema escrito por G. Mistral

$u$  : J.L. Borges fue un escritor argentino

luego

$t \wedge u$  es V, dada que ambas proposiciones son verdaderas

e) Si  $p \wedge q$  es F y q es V entonces p es falsa

f) Si p es F y q es V entonces  $\sim p \wedge \sim q$  es falsa

**Propiedades de la conjunción**

Sean p , q , r proposiciones

- a)  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  conmutativa
- b)  $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$  asociativa
- c)  $p \wedge p \equiv p$
- d)  $p \wedge \sim p \equiv F$  (Contradicción)

**Demostración** ( Mediante tablas de verdad )

- a)
- b)

**Nota**

Las proposiciones que siempre son falsas se llaman **contradicción**

**Ejercicios 3.-**

1.- Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

- a)  $( 5 < 2 ) \wedge$  Paris es la capital de Francia .....
- b) Existe la división por 0 y José Luis Borges fue un escritor

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

$p$	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$
V	F	F
F	V	F

- c) mejicano .....  
 $mcm(7; 5) = 35 \wedge 1$  es divisor de todos los números
- d)  $(2 + 5 = 3)$  y La velocidad de la luz es 300.000 Km / seg  
 .....
- e) Sartre fue un Filosofo francés y La Luna es un planeta  
 .....
- f)  $(5 < 3) \wedge (-3 > -5)$  .....
- g)  $Z = Q$  y Cali es una ciudad colombiana .....
- h) El consecutivo de  $2k$  es  $2(k + 1) \wedge 5k + 2$  es múltiplo de 2  
 .....
- i)  $mcd(2x; 4x) = 2x \wedge \{ (20 = 2^{10}) \wedge (21 \text{ es divisor de } 63) \}$   
 .....
- j) No es cierto que si Paris está en Canada y Roma está  
 en Ecuador .....

2.- Encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

- a) Si  $p$  es V,  $\sim q$  es F y  $r$  es F; Hallar el valor de verdad de:  
 i)  $p \wedge \{ q \wedge (\sim r) \}$   
 ii)  $\sim p \wedge [r \wedge \sim(\sim q)]$
- b) Si  $\sim p$  es F,  $q$  es F,  $\sim r$  es V y  $t$  es f; Hallar el valor de  
 verdad de:  
 i)  $\sim \{ t \wedge \sim[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \}$   
 ii)  $\sim q \wedge \sim \{ \sim t \wedge \sim[\sim p \wedge r] \}$
- c) Si  $p \wedge (\sim q)$  es V y  $q$  es F. ¿Cuál es el valor de verdad de  $p$ ?
- d) Si  $p \wedge (\sim q \wedge \sim r)$  es F y  $p$  es V. ¿Qué valores pueden tomar  $q$  y  $r$ ?

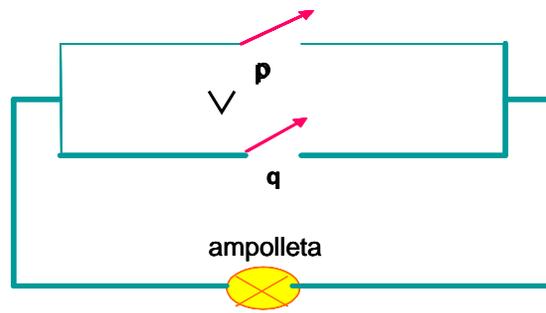
2.- **Disyunción incluyente** ( $\vee$ )

Consideremos el siguiente circuito electrico compuesto por dos interruptores ( $p$  y  $q$ ) y una ampolleta, de modo que si éstos están cerrado sea **V** y si están abierto sea **F**.

Para que la ampolleta esté encendida, es preciso que a lo menos una de los interruptores esté conectado, de modo que, si ambos interruptores están abierto, entonces la ampolleta no se enciende, luego la tabla de validez es:

Ejemplos

- a)  $p$  : La nieve es blanca ;  $q$  : Africa es un país  
 luego



p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

<b>p</b>	<b>-p</b>	<b><math>p \vee -p</math></b>
<b>V</b>	<b>F</b>	<b>V</b>
<b>F</b>	<b>V</b>	<b>V</b>

- b)  $p \vee q$  es V, puesto que p es V, q es F  
 $r : 2^{-1} = 2$  ;  $s = J. Cortazar$  fue un escritor Uruguayo  
luego  
 $r \vee s$  es F, puesto que ambas proposiciones son F
- c)  $t : Caracas$  es la capital de Venezuela  
 $u : 134431$  es divisible por 11  
luego  
 $t \vee u$  es V, puesto que ambas son proposiciones V

### Propiedades de la disyunción inclusiva

Sean  $p, q$  y  $r$  proposiciones

- a)  $p \vee q \equiv q \vee p$  conmutativa  
b)  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$  asociativa  
c)  $p \vee \sim p \equiv V$   
d)  $p \vee p \equiv p$

Demostración

c)

### Definición

Si una proposición simple o una proposición compuesta es siempre verdadera se dice que se trata de una **tautología**.

### Ejercicios 4.-

1.- Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

- a)  $(5 < 2) \vee$  Paris es la capital de Francia .....
- b) Existe la división por 0  $\vee$  José Luis Borges es un escritor mejicano .....
- c)  $mcm(7; 5) = 35 \vee$  1 es divisor de todos los números .....
- d)  $(2 + 5 = 3) \vee$  La velocidad de la luz es 300.000 Km / seg .....

- .....
- e) Sartre fue un Filósofo francés  $\vee$  La Luna es un planeta .....
- f)  $(5 < 3) \vee (-3 > -5)$  .....
- g)  $Z = Q \vee$  Cali es una ciudad colombiana .....
- h) El consecutivo de  $2k$  es  $2(k + 1) \vee 5k + 2$  es múltiplo de 2 .....
- i)  $\text{mcd}(2x; 4x) = 2x \vee \{ (20 = 2^{10}) \vee (21 \text{ es divisor de } 63) \}$  .....
- j) No es cierto que Paris está en Canada  $\vee$  Roma está en Ecuador .....

2.- Encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

a) Si  $p$  es V,  $\sim q$  es F y  $r$  es F; Hallar el valor de verdad de:

- i)  $p \vee \{ q \vee (\sim r) \}$   
 ii)  $\sim p \vee [r \vee \sim(\sim q)]$

b) Si  $\sim p$  es F,  $q$  es F,  $\sim r$  es V y  $t$  es f; Hallar el valor de

verdad de:

- i)  $\sim \{ t \vee \sim[\sim p \vee (\sim q \vee r)] \}$   
 ii)  $\sim q \vee \sim \{ \sim t \vee \sim[\sim p \vee r] \}$

c) Si  $p \vee (\sim q)$  es V y  $q$  es F. ¿Cuál es el valor de verdad de  $p$ ?

d) Si  $p \vee (\sim q \vee \sim r)$  es F y  $p$  es V. ¿Qué valores pueden tomar  $q$  y  $r$ ?

**Leyes de Morgan**

- a)  $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$   
 b)  $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

**Demostración**

a)

$p$	$q$	$\sim(p \wedge q)$	$\equiv$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F		F
V	F	V		V
F	V	V		V
F	F	V		V

b)

$p$	$q$	$\sim(p \vee q)$	$\equiv$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F		F
V	F	F		F
F	V	F		F
F	F	V		V

### Ejemplos

- a)  $p : \sqrt{4} = -2$  ;  $q : C. Fuentes es un escritor mejicano$   
luego  
i)  $\sim (p \vee q) \equiv F$   
ii)  $\sim (p \wedge q) \equiv V$
- b)  $r : 0$  es divisible por  $10$   
 $s : t$  es una letra vocal  
luego  
i)  $\sim (r \vee s) \equiv F$   
ii)  $\sim (r \wedge s) \equiv V$
- c) Si  $\sim (p \vee q) \equiv F$  y  $q$  es  $F$  entonces  $p$  es  $V$
- d) Si  $\sim (p \wedge \sim q)$  es  $V$  y  $p$  es  $V$  entonces  $q$  es  $V$

### Ejercicios 5.-

- a)  $p : 14$  es múltiplo de  $3$  ;  $q : Julio Cortazar$  escribió *Rayuela*

$$r : -\sqrt[3]{-1} = -\frac{1}{3} \quad s : (a-b)^3 = a^3 - b^3$$

$$t : \sqrt[4]{a^4 + b^8} = a + b^2 \quad u : CO_2 \text{ es un gas del}$$

calentamiento

global

Encuentre los valores de verdad de :

- i)  $\sim (p \wedge \sim q)$       ii)  $\sim (s \wedge \sim u)$   
iii)  $\sim \{r \wedge \sim [p \wedge \sim (t \vee \sim q)]\}$   
iv)  $\sim r \vee \{s \vee \sim [q \wedge \sim (u \wedge \sim p)]\}$   
v)  $\sim t \wedge \{u \vee \sim [q \wedge \sim (\sim u \vee \sim p)]\}$
- b) Si  $\sim (p \wedge q)$  es  $V$  y  $q$  es  $F$  entonces  $p$  es .....
- c) Si  $p \wedge \sim q$  es  $V$  y  $p$  es  $F$  entonces  $\sim (\sim p \wedge q)$  es .....
- d) Si  $\sim [p \wedge \sim (q \vee \sim r)]$  es  $V$  ¿ Cuáles son los probables valores de  $p, q$  y  $r$ ? (justifique)
- e) Si  $\sim [q \vee \sim (p \wedge \sim r)]$  es  $F$ . ¿ Cuáles son los probables valores de  $p, q$  y  $r$  (justifique)

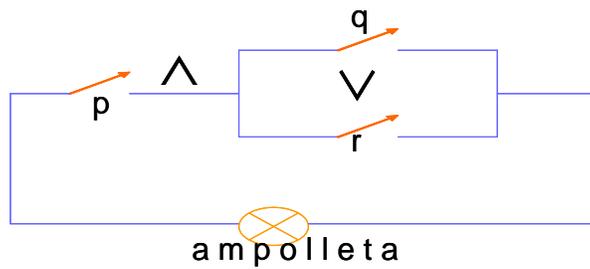
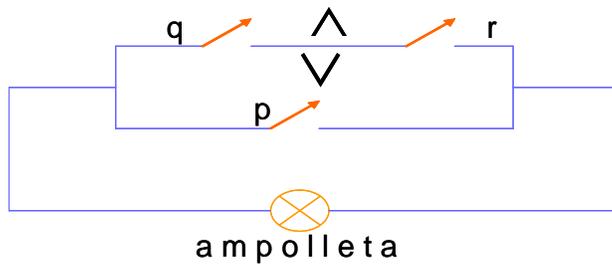
### Propiedades distributivas

Sean  $p, q$  y  $r$  proposiciones

- a)  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$   
b)  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

### Demostración ( Sólo a )

- a)



p	q	r	$p \vee (q \wedge r)$	$\equiv$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V		V
V	V	F	V		V
V	F	V	V		V
V	F	F	V		V
F	V	V	V		V
F	V	F	F		F
F	F	V	F		F
F	F	F	F		F

Graficamente, las propiedades distributivas se pueden representar en forma de circuito de la siguiente forma

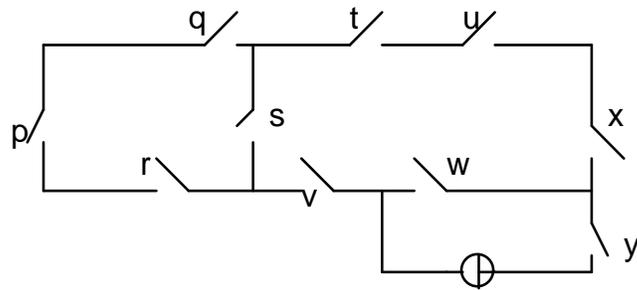
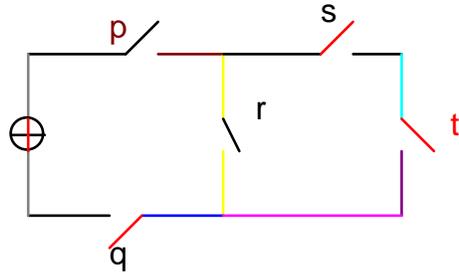
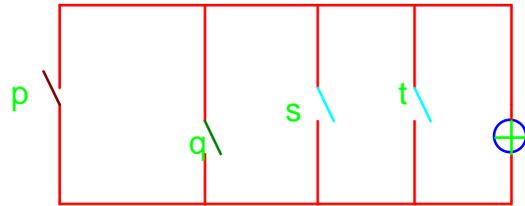
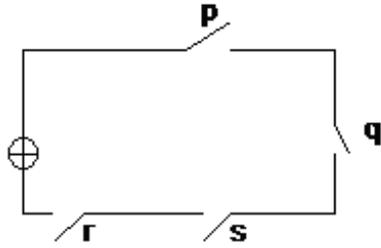
a)  $p \vee (q \wedge r)$

b)  $p \wedge (q \vee r)$

**Ejercicios 5.-** Describa usando simbología lógica los siguientes circuitos

- a)
- b)
- c)
- d)

**Definición**



Las proposiciones compuestas que no son tautologías ni contradicciones se llaman **contingencias**.

**4.- Disyunción excluyente ( $\vee$ )**  
Consideremos el siguiente ejemplo

$p$  : Hoy a las tres iré al teatro  
 $q$  : Hoy a las tres iré a la playa  
luego

Hoy a las tres iré al teatro **o** iré a la playa  
claramente "o" es excluyente dado que no se pueden cumplir ambas proposiciones a la vez, luego la tabla de verdad para  $p \vee q$  está dada por:

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

De la tabla de verdad, se puede concluir que la proposición  $p \vee q$  es V si y sólo si

una de ellas es V y falsa en los otros casos.

**Ejemplos**

a)  $p : 2 + 2 = 5$      $q : \frac{8}{9}$  es un número racional  
luego  $p \vee q$  es una proposición verdadera

b)  $p : 3 + 1 = 4$  ;  $q : 0^0 = 1$  ;  $r : \text{Valparaíso es patrimonio de la humanidad}$

luego  $(p \wedge r) \vee (q \vee r)$  es una proposición F ( ¿ Porquè ?)

**Propiedades**

- a)  $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- b)  $p \vee p \equiv F$                       contradicción
- c)  $p \vee \sim p \equiv V$                     tautología
- d)  $p \vee V, p \vee F$                   son contingencias

**Ejercicio 6.-**

- a) Encuentre las tablas de verdad de :
  - i)  $p \vee (q \vee r)$
  - ii)  $p \vee (q \vee r)$     y     $(p \vee q) \vee (p \vee r)$     ¿ Qué concluye ?
  - iii)  $p \vee (q \wedge r)$     y     $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$     ¿ Qué concluye ?
- b) Sean  $p ( V ) , q ( F ) ; \sim r ( F )$  Encuentre el valor de verdad de :

- i)  $\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$
- ii)  $\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})$
- iii)  $\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$
- iv)  $\sim [\mathbf{p} \vee \sim (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})]$

c) Sean

$$p : \sqrt{-8} = -2 \quad ; \quad q : (a + 1)^2 = a^2 + 1 \quad ; \quad r : 2^4 \cdot 2^{-2} = 2^6$$

$$s : \frac{1}{2} : 2 = 4$$

Hallar el valor de verdad de:

- i)  $\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{s})$
- ii)  $\mathbf{p} \vee [(\mathbf{s} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{q}]$
- iii)  $\mathbf{p} \wedge [(\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \vee \sim \mathbf{s}]$
- iv)  $\mathbf{p} \vee [\mathbf{q} \vee (\mathbf{r} \wedge \mathbf{s})]$

### 5.- Condicional ( $\Rightarrow$ )

Sean  $p$  y  $q$  proposiciones, la proposición " si  $p$ , entonces  $q$  ", se llama proposición condicional y se anota:

$$p \Rightarrow q$$

donde

$\mathbf{p}$  es el **antecedente** o **hipotesis**

$\mathbf{q}$  es el **consecuente** o **tésis**

Consideremos el siguiente ejemplo:

" Si me saqué el loto, entonces me compro un auto "

Veamos las 4 posibilidades.

a) Me saqué el loto y me compré el auto

En este caso se cumplió la promesa y la proposición si  $p$ , entonces  $q$  es V, es decir,

$$\begin{array}{c} V \Rightarrow V \\ V \end{array}$$

b) Me saqué el loto y no compré el auto

En este caso no se cumplió la promesa y la proposición si  $p$ , entonces  $q$  es F, es decir,

$$\begin{array}{c} V \Rightarrow F \\ F \end{array}$$

c) No me saqué el loto, pero me compre el auto

En este caso se cumplió la promesa a pesar de no haberse sacado el loto

y la proposición si  $p$ , entonces  $q$  es V, es decir,

$$\begin{array}{c} F \Rightarrow V \\ V \end{array}$$

d) No me saqué el loto y no me compré el auto

En este caso no se rompió la promesa y la proposición si  $p$ , entonces  $q$  es V.

$$\begin{array}{ccc} F & \Rightarrow & F \\ & & V \end{array}$$

Considerando el ejemplo, podemos decir que la tabla de verdad de  $p \Rightarrow q$ , es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las proposiciones condicionales son muy importantes en matemática y existen varias maneras de enunciarlas, entre ellas

$$p \Rightarrow q \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } p, \text{ entonces } q \\ p \text{ sólo si } q \\ q \text{ si } p \\ p \text{ es suficiente para } q \\ q \text{ es necesario para } p \end{array} \right.$$

### Ejemplos

a) Si dos rectas no son paralelas en un plano, entonces se intersectan en un punto

Esta proposición en Geometría se puede escribir usando la lógica simbólica:

$$L_1, L_2 \in \wp, L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{P\}$$

b) Si  $a$  es un entero positivo, entonces  $a^2$  es mayor que cero  
 $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a^2 > 0$

c) Si estudias clase a clase, entonces te hará mas fácil la comprensión de los temas.

d) Si  $x^2 + 9 = 0$  entonces tiene solución vacía en reales.  
 $\text{Si } x^2 + 9 = 0 \Rightarrow S = \emptyset_{\mathbb{R}}$

### Propiedades de la condicional

- a)  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- b)  $\{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\} \Rightarrow (p \Rightarrow r)$  Propiedad transitiva  
 La propiedad transitiva es conocida también como el **método directo de demostración**.
- c)  $(p \Rightarrow \sim p) \equiv \sim p$
- d)  $(\sim p \Rightarrow p) \equiv p$
- e)  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$  llamado contrapositivo

Esta propiedad es conocida también como el método **indirecto** **de demostración.**

f)  $[p \Rightarrow (p \vee q)] \equiv V$  es decir es una tautología

g)  $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)] \equiv F$  es una **contradicción** y también es un método de demostración, observe que se **niega la hipótesis** y se mantiene el valor de **verdad de la tésis**, llegando a una contradicción, la que nace de haber negado la hipótesis.

h)  $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$  Modus Ponens

i)  $[\sim q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim p$  Modus Tolens

### 5.- BICONDICIONAL

La proposición compuesta obtenida al unir dos proposiciones simples por medio de la palabras

"...**Si y sólo si...**" , se llama **bicondicional** y se utiliza el símbolo  $\Leftrightarrow$  .

Esta proposición compuesta es equivalente a la forma:

Sean  $p$  ,  $q$  proposiciones

$$p \Leftrightarrow q \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

De lo anterior se establece la siguiente tabla de verdad:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$

Otra forma de expresar la bicondicional en el lenguaje usual es,

" **p es condición necesaria y suficiente para q** "

#### Propiedades de la bicondicional

Sean  $p$  ,  $q$  y  $r$  proposiciones

- a)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
- b)  $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$  Propiedad transitiva
- c)  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
- d)  $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$   
 $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$  Principios de absorción

$$i) (p \wedge x) \vee (q \wedge z) \qquad ii) (q \Leftrightarrow z) \Rightarrow (r \vee y)$$

**Ejercicio 7.-**

1.- Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

- i)  $5 < 2$  ó Paris es la capital de Francia .....
- ii) Existe la división por 0 y José Luis Borges es un escritor argentino .....
- iii)  $\text{mcm}(7; 5) = 35$  y 1 es divisor de todos los números .....
- iv)  $2 + 5 = 3$  y La velocidad de la luz es 300.000 Km / seg .....
- v) Enrique Lafourcade es un escritor y Neruda es un poeta contemporáneo .....
- vi) Sartre fue un Filósofo francés o La Luna es un planeta .....
- vii)  $(5 < 3) \wedge (-3 > -5)$  .....
- viii)  $Z \subset Q$  y Cali es una ciudad colombiana .....
- ix) El consecutivo de  $2k$  es  $2(k + 1) \wedge (5k + 2)$  es múltiplo de 2 .....
- x) Si Colo Colo es un equipo brasilero, entonces el trópico de cáncer está en el hemisferio sur .....
- xi) No es cierto que si Neruda es dramaturgo si y sólo si Eduardo González escribió La Divina Comedia. ....

2.- Si p,q ,r son proposiciones verdaderas y x,y,z son proposiciones falsas, encuentre el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.

3.-

- i) ¿ Qué valor deben tener r y q de modo que la proposición
- ii) ¿ Qué valor debe tener p para que la proposición
- iii) ¿ Qué valor deben tener q y p de modo que la proposición
- Sea falsa
- iv) ¿ Qué valor de verdad debe tener r y s de modo que la proposición

$$iii) \quad \overline{[(p \Rightarrow q) \vee (r \Leftrightarrow x)]} \wedge [(q \Rightarrow y) \vee (r \Rightarrow z)]$$

$$iv) \quad \{[(p \Rightarrow x) \Rightarrow q] \Rightarrow y\} \Leftrightarrow r$$

$$v) \quad \bar{x} \vee r \quad vi) \quad [(p \Leftrightarrow z) \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow x$$

$$vii) \quad \overline{[(p \Leftrightarrow q) \vee (r \Rightarrow (x \wedge q))]} \wedge \overline{q \wedge z}$$

$$viii) \quad x \wedge \{q \vee [r \wedge (y \vee \langle p \wedge z \rangle)]\}$$

$$ix) \quad [(p \Rightarrow q) \wedge \{q \Rightarrow x \vee (y \Leftrightarrow r)\}] \Leftrightarrow x$$

$$\bar{q} \wedge [\bar{p} \vee \{p \vee (q \wedge r)\}] \text{ sea } V ?$$

$$p \vee (q \wedge F) \text{ sea } F ?$$

$$\left( \overline{p \wedge \bar{q}} \right) \Rightarrow p ?$$

$$r \Leftrightarrow \left( s \Rightarrow [r \Leftrightarrow \{s \Rightarrow \bar{r}\}] \right) \text{ sea } F ?$$

$$u \Rightarrow (\overline{u \Leftrightarrow \bar{u}}) \text{ sea } V ?$$

$$\bar{p} \vee (q \Rightarrow [r \wedge p]) \text{ sea Falsa ?}$$

v) ¿ Qué valor de verdad debe tener u de modo que la proposición

vi) ¿ Qué valor de verdad deben tener p , q y r de modo que la proposición

4.-

i) Si  $q \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim p)$  es una proposición falsa, determine el valor de

verdad de:

$$(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow [\sim p \vee (\sim r \vee q)]$$

ii) Se sabe que **p** es verdadero. determine para que valores de **q** y **r** la proposición

$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow \overline{(p \vee q)}$$

**Observación**

$$\overline{(p \vee q)} \equiv \sim (p \vee q)$$

iii) ¿ Para qué valores de **p** y **q** la siguiente proposición es falsa ?

$$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow \overline{(\overline{\overline{q}} \vee p)}$$

iv) Se sabe que **p** es una proposición falsa. ¿ Qué valor de verdad debe tener **q** para que la siguiente proposición sea verdadera ?

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$$

v) ¿ Para qué valores de p, q, r, la siguiente proposición sea falsa ?

$$[(p \wedge q) \Rightarrow (\overline{\overline{\overline{p}}} \vee r)] \Leftrightarrow (q \Leftarrow \overline{\overline{\overline{p}}})$$

5.- Escriba la negación de las siguientes proposiciones

6.- Simplifique las siguientes expresiones

a)  $p \wedge \bar{q}$

b)  $(p \vee q) \vee r$

c)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

d)  $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

$$e) \quad (\bar{p} \wedge q) \vee \bar{p} \qquad f) \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{q} \wedge r)$$

$$g) \quad (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \bar{p}) \qquad h) \quad (p \wedge q) \Rightarrow r$$

$$\begin{aligned}
 a) \quad & p \Rightarrow (F \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge q)) & b) \quad & V \Rightarrow [p \vee (\bar{p} \wedge p)] \\
 c) \quad & p \vee (p \Rightarrow (\overline{p \wedge q})) & d) \quad & q \wedge [q \wedge (V \vee \bar{q})] \\
 e) \quad & [(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (\bar{p} \vee q)] \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \\
 f) \quad & p \Rightarrow (p \wedge q) & g) \quad & (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q}) \\
 h) \quad & \{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow \bar{q})\} \vee (r \Rightarrow \bar{p}) \\
 i) \quad & \overline{[q \vee \{( \bar{p} \wedge q ) \wedge \bar{q} \}]} \Leftrightarrow (\bar{q} \vee r) \\
 j) \quad & \overline{V \wedge \{F \Leftrightarrow [V \Rightarrow \langle F \wedge (V \Leftrightarrow |F \underline{\vee} V |) \rangle]\}} \\
 k) \quad & p \Rightarrow \{q \Rightarrow [p \Rightarrow (\langle q \Rightarrow (p \Rightarrow q) \rangle \Rightarrow p)]\} \\
 l) \quad & \{q \Leftrightarrow r\} \Leftrightarrow (\bar{q} \Leftrightarrow \bar{r}) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q) \\
 m) \quad & (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q}) \\
 n) \quad & \overline{(p \Rightarrow \bar{q})} \wedge [\bar{p} \vee (\bar{q} \wedge \bar{p})] \wedge \bar{p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
a) & p \Rightarrow (F \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge q)) \qquad b) \quad V \Rightarrow [p \vee (\bar{p} \wedge p)] \\
c) & p \vee (p \Rightarrow (\overline{p \wedge \bar{q}})) \qquad d) \quad q \wedge [q \wedge (V \vee \bar{q})] \\
e) & [(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (\bar{p} \vee q)] \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \\
f) & p \Rightarrow (p \wedge q) \quad g) \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q}) \\
h) & \{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow \bar{q})\} \vee (r \Rightarrow \bar{p}) \\
i) & [q \vee \{(\bar{p} \wedge q) \wedge \bar{q}\}] \Leftrightarrow (\bar{q} \vee r) \\
j) & V \wedge \left\{ F \Leftrightarrow \left[ V \Rightarrow \langle F \wedge (V \Leftrightarrow |F \underline{\vee} V|) \rangle \right] \right\} \\
k) & p \Rightarrow \left\{ q \Rightarrow \left[ p \Rightarrow (\langle q \Rightarrow (p \Rightarrow q) \rangle \Rightarrow p) \right] \right\} \\
l) & \{q \Leftrightarrow r\} \Leftrightarrow (\bar{q} \Leftrightarrow \bar{r}) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q) \\
m) & (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q}) \\
n) & (\overline{p \Rightarrow \bar{q}}) \wedge [\bar{p} \vee (\bar{q} \wedge \bar{p})] \wedge \bar{p}
\end{array}$$

7.- Simplifique las siguientes expresiones

5.- determine si las siguientes proposiciones son tautologia, contradicciones

o

contingencias.

6.- Completar las siguientes proposiciones

$$\begin{array}{ll}
a) & p \Rightarrow (p \vee \overline{\overline{F \vee \overline{p}}}) \\
b) & p \Leftrightarrow (p \wedge V) \\
c) & (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \\
d) & p \wedge (p \Rightarrow \overline{p}) \\
e) & \left\{ \overline{q \vee [p \Rightarrow (p \vee \overline{q})]} \right\} \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
a) & V \wedge p \Leftrightarrow \dots\dots\dots \\
b) & p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow \dots\dots\dots \\
c) & p \vee F \Leftrightarrow \dots\dots\dots \\
d) & [p \Rightarrow (F \Leftrightarrow \overline{p})] \Rightarrow \dots\dots\dots \\
e) & p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow \dots\dots\dots \\
f) & p \vee \overline{p} \Leftrightarrow \dots\dots\dots \\
g) & (p \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow \dots\dots\dots \\
h) & [V \vee F] \Leftrightarrow \dots\dots\dots
\end{array}$$