

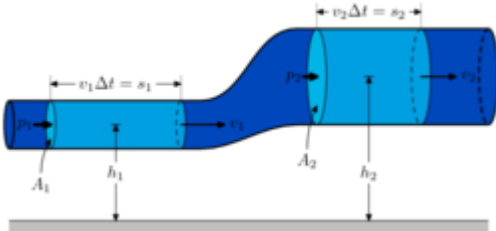


Guía Conceptual de Termodinámica

Tema: Principio de Bernoulli.

Montoya

Esquema para el desarrollo del principio de Bernoulli (*Teorema de Bernoulli*).



El **principio de Bernoulli**, también denominado **ecuación de Bernoulli** o **Trinomio de Bernoulli**, describe el comportamiento de un **fluido** moviéndose a lo largo de una **línea de corriente**. Fue expuesto por **Daniel Bernoulli** en su obra *Hidrodinámica* (1738) y expresa que en un fluido ideal (sin **viscosidad** ni **rozamiento**) en régimen de circulación por un conducto cerrado, la **energía** que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido. La energía de un fluido en cualquier momento consta de tres componentes:

- 1.- Cinético: es la energía debida a la velocidad que posea el fluido.
- 2.- Potencial gravitacional: es la energía debido a la altitud que un fluido posea.
- 3.- Energía de flujo: es la energía que un fluido contiene debido a la presión que posee.

La siguiente ecuación conocida como "Ecuación de Bernoulli" (Trinomio de Bernoulli) consta de estos mismos términos.

$$\frac{V^2 \rho}{2} + P + \rho g z = \text{constante}$$

donde:

- V = **velocidad** del fluido en la sección considerada.
- g = **aceleración gravitatoria**
- z = altura en la dirección de la **gravedad** desde una **cota** de referencia.
- P = **presión** a lo largo de la línea de corriente.
- ρ = **densidad** del fluido.

Para aplicar la ecuación se deben realizar los siguientes supuestos:

- **Viscosidad** (fricción interna) = 0 Es decir, se considera que la línea de corriente sobre la cual se aplica se encuentra en una zona 'no viscosa' del fluido.
- **Caudal** constante
- **Fluido** incompresible - ρ es constante.

- La ecuación se aplica a lo largo de una [línea de corriente](#).

Aunque el nombre de la ecuación se debe a [Bernoulli](#), la forma arriba expuesta fue presentada en primer lugar por [Leonhard Euler](#).

Un ejemplo de aplicación del principio lo encontramos en el [Flujo de agua en tubería](#).

Contenidos:

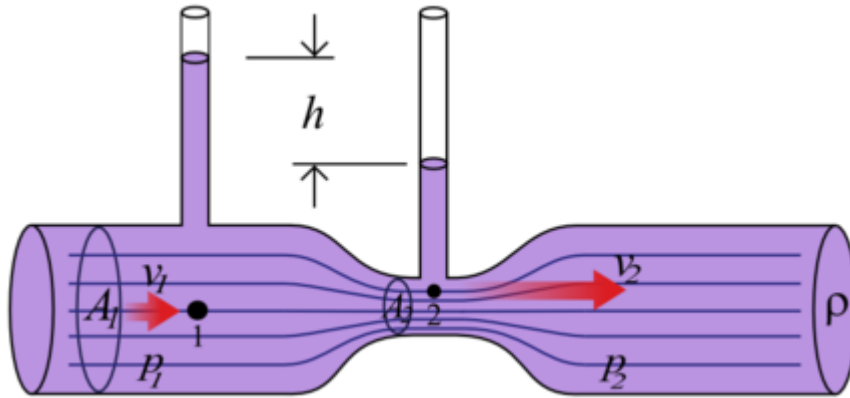
- [1 Características y consecuencias](#)
- [2 Ecuación de Bernoulli y la Primera Ley de la Termodinámica](#)
 - [2.1 Suposiciones](#)
 - [2.2 Demostración](#)
- [3 Aplicaciones Principio de Bernoulli](#)
- [4 Véase también](#)

Características y consecuencias

Cada uno de los términos de esta ecuación tienen unidades de [longitud](#), y a la vez representan formas distintas de energía; en [hidráulica](#) es común expresar la energía en términos de longitud, y se habla de **altura** o **cabezal**, esta última traducción del inglés **head**. Así en la ecuación de Bernoulli los términos suelen llamarse alturas o cabezales de velocidad, de presión y cabezal hidráulico, del inglés **hydraulic head**; el término z se suele agrupar con P / γ para dar lugar a la llamada **altura piezométrica** o también **carga piezométrica**.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{cabezal de velocidad} & & \text{altura o carga piezométrica} & & & & \text{Cabezal o Altura hidráulica} \\
 \underbrace{\frac{V^2}{2g}} & + & \underbrace{\frac{P}{\gamma} + z} & = & \underbrace{H} & & \\
 & & \underbrace{\text{cabezal de presión}} & & & &
 \end{array}$$

También podemos reescribir este principio en forma de suma de presiones multiplicando toda la ecuación por γ , de esta forma el término relativo a la velocidad se llamará **presión dinámica**, los términos de presión y altura se agrupan en la **presión estática**.



Esquema del efecto Venturi.

$$\underbrace{\frac{\rho V^2}{2}}_{\text{presión dinámica}} + \underbrace{P + \gamma z}_{\text{presión estática}} = \text{constante}$$

O escrita de otra manera más sencilla:

$$q + p = p_0$$

Donde

- $q = \frac{\rho V^2}{2}$
- $p = P + \gamma z$
- p_0 es una constante-

Igualmente podemos escribir la misma ecuación como la suma de la **energía cinética**, la **energía de flujo** y la **energía potencial** gravitatoria por unidad de masa:

$$\underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{\frac{P}{\rho}}_{\text{energía de flujo}} + \underbrace{gz}_{\text{energía potencial}} = \text{constante}$$

Así el principio de Bernoulli puede ser visto como otra forma de la ley de la **conservación de la energía**, es decir, en una línea de corriente cada tipo de energía puede subir o disminuir en virtud de la disminución o el aumento de las otras dos.

Esta ecuación permite explicar fenómenos como el [efecto Venturi](#), ya que la aceleración de cualquier fluido en un camino *equipotencial* (con igual energía potencial) implicaría una disminución de la presión. Gracias a este efecto observamos que las cosas ligeras muchas veces tienden a salirse de un carro en movimiento cuando se abren las ventanas, ya que la presión del aire es menor fuera del auto ya que está en movimiento respecto a aquél que se encuentra dentro del auto, donde la presión es necesariamente mayor; pero en forma aparentemente contradictoria el aire entra al carro, pero esto ocurre por fenómenos de [turbulencia](#) y [capa límite](#).

Ecuación de Bernoulli y la Primera Ley de la Termodinámica

De la [primera ley de la termodinámica](#) se puede concluir una ecuación estéticamente parecida a la ecuación de Bernoulli anteriormente señalada, pero conceptualmente distinta. La diferencia fundamental yace en los límites de funcionamiento y en la formulación de cada fórmula. La ecuación de Bernoulli es un balance de fuerzas sobre una partícula de fluido que se mueve a través de una línea de corriente, mientras que la primera ley de la termodinámica consiste en un balance de [energía](#) entre los límites de un *volumen de control* dado, por lo cual es más general ya que permite expresar los intercambios energéticos a lo largo de una corriente de fluido, como lo son las pérdidas por fricción que restan energía, y las bombas o ventiladores que suman energía al fluido. La forma general de esta, llamémosla, "forma energética de la ecuación de Bernoulli" es:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 \frac{g}{g_c} + W = h_f + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \frac{g}{g_c}$$

donde:

- γ es el [Peso específico](#) ($\gamma = \rho g$).
- w es una medida de la energía que se le suministra al fluido.
- h_f es una medida de la energía empleada en vencer las fuerzas de fricción a través del recorrido del fluido.
- Los subíndices 1 y 2 indican si los valores están dados para el comienzo o el final del volumen de control respectivamente.
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ y $g_c = 1 \text{ kgm/Ns}^2$

Suposiciones

La ecuación arriba escrita es un derivado de la primera ley de la termodinámica para flujos de fluido con las siguientes características.

- El *fluido de trabajo*, es decir, aquél que fluye y que estamos considerando, tiene una densidad constante.
- No existe cambio de [energía interna](#).

Demostración

Escribamos la primera ley de la termodinámica con un [criterio de signos termodinámico](#) conveniente:

$$w + q = \Delta h + \Delta \frac{V^2}{2} + g\Delta z$$

Recordando la definición de la [entalpía](#) $h = u + Pv$, donde u es la energía interna y v se conoce como [volumen específico](#) $v = 1 / \rho$. Podemos escribir:

$$w + q = \Delta u + \Delta \frac{P}{\rho} + \Delta \frac{V^2}{2} + g\Delta z$$

que por la suposiciones declaradas más arriba se puede reescribir como:

$$w + q = \frac{P_2}{\rho} - \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

dividamos todo entre el término de la aceleración de gravedad

$$\frac{w}{g} + \frac{q}{g} = \frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + z_2 - z_1$$

Los términos del lado izquierdo de la igualdad son relativos a los flujos de energía a través del volumen de control considerado, es decir, son las entradas y salidas de energía del fluido de trabajo en formas de [trabajo](#) (w) y [calor](#) (q). El término relativo al trabajo w / g consideraremos que entra al sistema, lo llamaremos h y tiene unidades de [longitud](#), al igual que q / g , que llamaremos h_f quién sale del sistema, ya que consideraremos que sólo se intercambia calor por vía de la fricción entre el fluido de trabajo y las paredes del conducto que lo contiene. Así la ecuación nos queda:

$$h - h_f = \frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + z_2 - z_1$$

o como la escribimos originalmente:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + h = h_f + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2$$

Así, podemos observar que el principio de Bernoulli es una consecuencia directa de la primera ley de la termodinámica, o si se quiere, otra forma de esta ley. En la primera ecuación presentada en este artículo el volumen de control se había reducido a tan solo una

línea de corriente sobre la cual no habían intercambios de energía con el resto del sistema, de aquí la suposición de que el fluido debería ser ideal, es decir, sin viscosidad ni fricción interna, ya que no existe un término h_f entre las distintas líneas de corriente.

Aplicaciones del Principio de Bernoulli

Airsoft

Las réplicas usadas en [éste juego](#) suelen incluir un sistema llamado **HopUp** que provoca que el balón sea proyectado realizando un efecto circular, lo que aumenta el alcance efectivo de la réplica.

Chimenea

Las Chimeneas son altas para aprovechar que la velocidad del viento es más constante y elevada a mayores alturas. Cuanto más rápidamente sopla el viento sobre la boca de una chimenea, más baja es la presión y mayor es la diferencia de presión entre la base y la boca de la chimenea, en consecuencia, los gases de combustión se extraen mejor.

Tubería

La ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad también nos dicen que si reducimos el área transversal de una tubería para que aumente la velocidad del fluido que pasa por ella, se reducirá la presión.

Sustentación de aviones

El efecto Bernoulli es también en parte el origen de la sustentación de los aviones. Gracias a la forma y orientación de los perfiles aerodinámicos, el ala es curva en su cara superior y está angulada respecto a las líneas de corriente incidentes. Por ello, las líneas de corriente arriba del ala están más juntas que abajo, por lo que la velocidad del aire es mayor y la presión es menor arriba del ala; al ser mayor la presión abajo del ala, se genera una fuerza neta hacia arriba llamada **sustentación**.

Movimiento de una pelota o balón con efecto

Si lanzamos una pelota o un balón con efecto, es decir rotando sobre sí mismo se desvía hacia un lado.

Carburador de automóvil

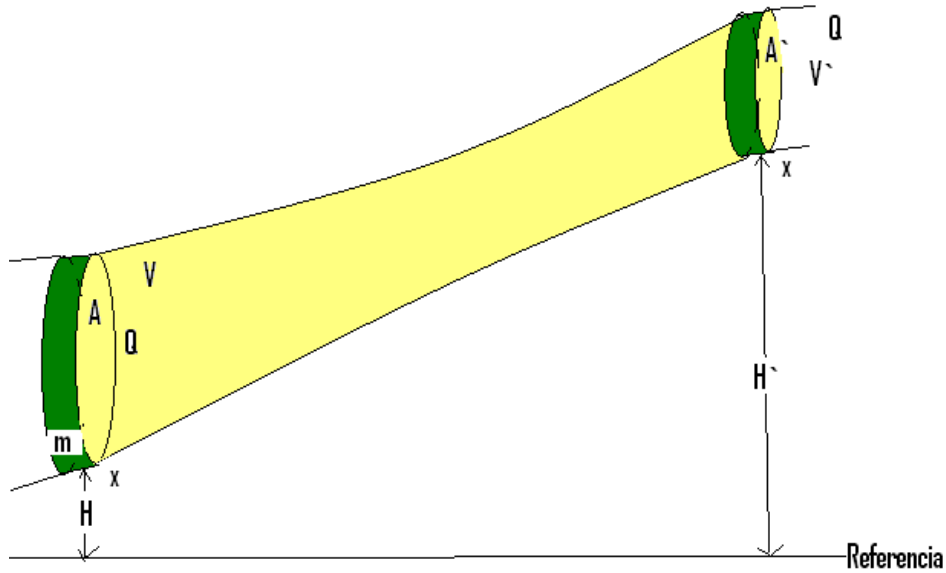
En un carburador de automóvil, la presión del aire que pasa a través del cuerpo del carburador, disminuye cuando pasa por un estrangulamiento. Al disminuir la presión, la gasolina fluye, se vaporiza y se mezcla con la corriente de aire.

Flujo de fluido desde un tanque

La tasa de flujo está dada por la ecuación de Bernoulli.

Deducción de la formula de Bernoulli (1700-1782)

Se sabe que : $Q=AV=A'V'$



Sabemos que la presión esta dada por:

$$p = \frac{F}{A}$$

$$pA=F$$

esta fuerza aplicada sobre la sección de masa m realiza un trabajo para desplazarla una distancia , digamos x ,

$$\text{esto es: } W=Fx$$

o bien

$$W=pAx$$

$W=p(Ax)$, de donde Ax corresponde al diferencial de volumen del fluido desplazado por la presión p , producto del trabajo de la fuerza F .

Como además, si el fluido tiene una densidad homogénea $\rho = \frac{m}{v}$, entonces:

$$W=px \frac{m}{\rho}$$

Si aplicamos la conservación de la energía a los diferenciales de masas, tenemos:

$$mgH + \frac{1}{2}mV^2 + pv = mgH' + \frac{1}{2}mV'^2 + p'v'$$

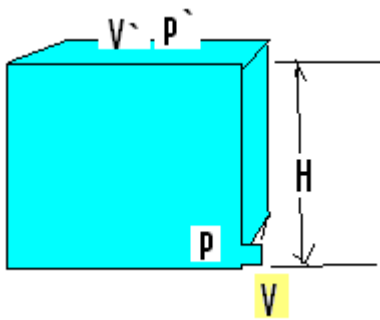
$$mgH + \frac{1}{2}mV^2 + p\frac{m}{\rho} = mgH' + \frac{1}{2}mV'^2 + p'\frac{m}{\rho}$$

$$gH + \frac{1}{2}V^2 + p\frac{1}{\rho} = gH' + \frac{1}{2}V'^2 + p'\frac{1}{\rho}$$

$$\rho gH + \frac{1}{2}\rho V^2 + p = \rho gH' + \frac{1}{2}\rho V'^2 + p'$$

En otras palabras: $\rho gH + \frac{1}{2}\rho V^2 + p = \text{Constante}$.

Teorema de Torricelli:



Si consideramos que la diferencia de presión es despreciable, que la velocidad en la parte superior es prácticamente nula, entonces aplicando la relación de Bernoulli, tenemos:

$$\rho gH + \frac{1}{2}\rho V^2 + p = \rho gH + \frac{1}{2}\rho V'^2 + p'$$

$$\rho gH + \frac{1}{2}\rho V^2 = \rho gH + \frac{1}{2}\rho V'^2 +$$

$$\frac{1}{2}V^2 = gH$$

$$V = \sqrt{2gH}$$