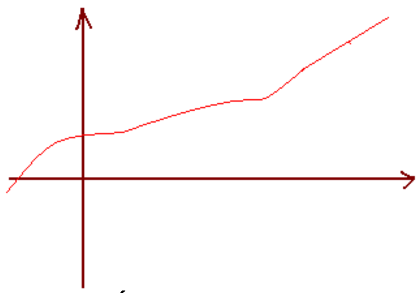
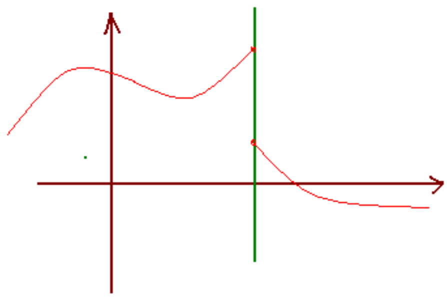
Guía Conceptual de Procesos Infinitos
Tema: Aplicaciones de Límite -Continuidad de Funciones.
Conceptos previos
Montoya

CONTINUIDAD DE UNA FUNCION REAL:

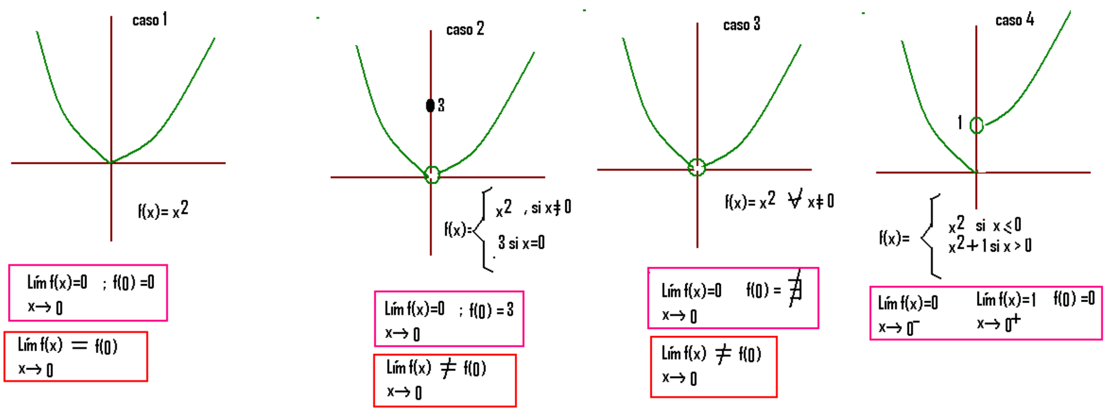
En forma intuitiva, decimos que una función real es continua cuando su grafico puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Si este proceso no puede realizarse , es decir , si en algún punto hay una interrupción , decimos que la función no es continua en ese punto o que tiene un punto de discontinuidad.


CONTÍNUA


DISCONTINUA

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN REAL EN UN PUNTO DEL DOMINIO

Consideremos las funciones y sus correspondientes gráficos:



Estos gráficos son muy similares, pero observamos que en x=0 presentan un comportamiento distinto.

UNA FUNCION REAL SE DENOMINA CONTINUA EN x= a , si se cumplen las tres condiciones siguientes:

$\exists\, f(a)\ ;\ a \in \mathrm{Dom}\, f$	$\exists \lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

FUNCIONES CONTINUAS EN CUALQUIER PUNTO DEL DOMINIO

Dada una función f(x) definida en los reales R , se dice que f(x) es continua en todo R , si para todo X0 en R , existe el limite para la función en ese punto.

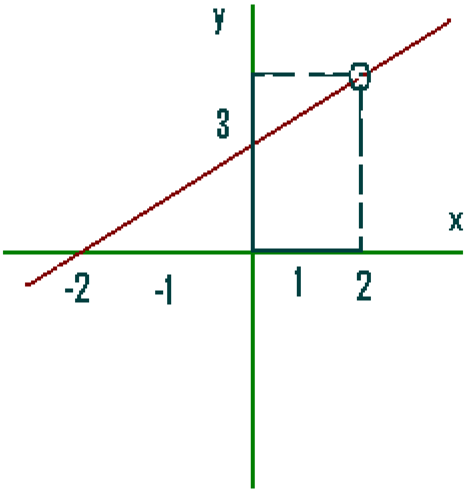
$$\boxed{\lim_{x \to X_0} f(x) = f(X_0)}$$

Ejemplos de estas funciones son :
1.- La función Lineal: f(x) = mx+b
2.- La función cuadrática: f(x) =ax2+bx+c
3.-la función parábola cúbica: f(x)= x 3

DISCONTINUIDAD EVITABLE O INEVITABLE:
Una función real R en R , se dice discontinua en x=a ; si no es continua en a.

DISCONTINUIDAD EVITABLE:
Si una función real f(x) es discontinua en x=a , su gráfica presenta una ruptura o corte en el punto de abscisa x=a.
Ejemplo: consideremos la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x-2}$$

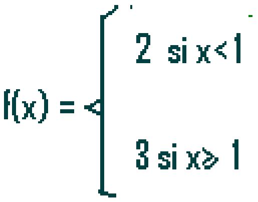


Esta función presenta una ruptura en x= 2 , ya que no esta definida en ese punto , es decir f(2) no existe , sin embargo el limite de la función en ese punto es 4.
La discontinuidad de esta función se puede evitar redefiniendo la función.
Esto es.

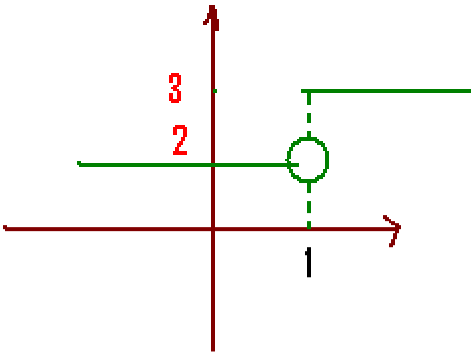
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

De este modo tanto el límite como el valor de la función en ese punto existen y tienen el mismo valor.
De este modo hemos redefinido la función, en principio discontinua en otra continua
“si f(x) es una función discontinua solamente en x=a de su dominio y existe el limite cuando x tiende a a , basta con definir como valor de f(x) a su limite en x=a

DISCONTINUIDAD INEVITABLE:
CONSIDEREMOS LA FUNCION:



Se observa que:



Luego el limite de la función cuando x tiende a 1 , no es único , por lo tanto no existe , de modo que la función es discontinua en x=1 . de este modo no se puede redefinir f(x) como función continua , lo que indica que f(x) presenta en este punto una discontinuidad inevitable.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

1.- Dada la función: f(x) = $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

1.1.- Compruebe que : $x \xrightarrow{Lim} 1 f(x) = 2$

1.2.- Grafique la función .determinando asuntotas

2.- Dada la función: f(x) = $\dfrac{x^2-9}{x+3}$ .Determine:

2.1.- $x \xrightarrow{Lim} -3 f(x)$

2.2.- Determine asuntotas verticales y horizontales si las hay.

2.3.- Grafique la función.

3.- Considere la función : f(x)=$\begin{cases} 2-x, -; x \neq 3 \\ 2, si, x = 3 \end{cases}$

3.1.- grafique f(x) 3.2.- construya una tabla de valores para x $\longrightarrow 3$

3.3.- calcule $x \xrightarrow{Lim} 3 f(x)$

4.- dado f(x) = $\begin{cases} x^2+1, x \neq 1 \\ 3, si, x = 1 \end{cases}$

4.1.- Grafique f(x) 4.2.- Construya una tabla para x $\longrightarrow 1$

4.3.- Calcule $x \xrightarrow{Lim} 1 f(x)$

5.- ¿Es continua f(x) = $\begin{cases} x, si, x > 0 \\ 0, si, x \leq 0 \end{cases}$ en x=0 y x=3?.Justifique su respuesta.

(Si en x=0, si en x= 3)

6.- Estudie la continuidad de cada función real en el punto cuya abscisa es indica.

6.1.- f(x) = $\frac{x+2}{x-4}, en x = 4$

6.2.- f(x) = $\begin{cases} 2x, si, x \geq 1 \\ x+3, si, x < 1 \end{cases}$ en x=1

6.3.- f(x) = $\frac{x-1}{x+3}, en x = 2$

6.4.- f(x) = x+3 , en x= -3

6.5.- f(x) 3x+2 , en x= -3/2

6.6.- f(x) = $\begin{cases} x+2, si, x \leq 0 \\ 3, si, x > 0 \end{cases}$, en x=0

(Discontinua, discontinua, continua, continua, continua, discontinua)

7.- Modifique la definición de cada una de las siguientes funciones discontinuas definidas en $\Re$, de modo que sean continuas en todos los puntos del Dominio.

7.1.- f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}, si, x \neq 2$

7.2.- f(x) = $\begin{cases} 1, si, x \neq 3 \\ 4, si, x = 3 \end{cases}$

7.3.- f(x)= $\frac{4x^2-9}{2x+3}, si, x \neq -3/2$

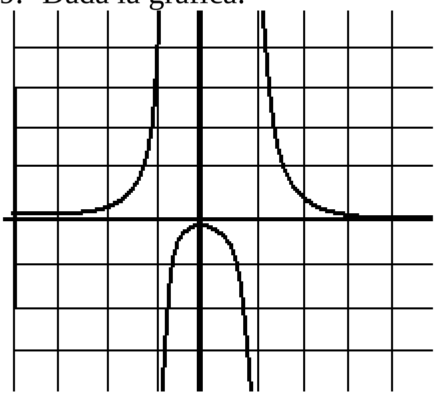
7.4.- Si f(x) = $\begin{cases} 0, si, x \geq 2 \\ 3x, si, x > 2 \end{cases}$ ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función en x=2? (inevitable)

8.- Determine el tipo de discontinuidad de las funciones reales :

8.1.- f(x) = $\frac{1}{x^2-4}$ 8.2.- f(x)= $\frac{1}{x}$ 8.3.- f(x)= $\frac{x^2-9}{x-3}$ 8.4.- f(x) $\frac{x+1}{x-1}$

(inevitable, inevitable,evitable,inevitable)

9.- Dada la grafica:



9.1.- ¿En que puntos f(x) es discontinua?

9.2.- ¿Qué puede decirse de los limites?9.2.1.- $x \xrightarrow{Lim} -1^- f(x)$

9.2.2. $x \xrightarrow{Lim} -1^+ f(x)$ 9.2.3.- $x \xrightarrow{Lim} 1 f(x)$ 9.2.4.- $x \xrightarrow{Lim} -\infty f(x)$

9.2.5.- $x \xrightarrow{Lim} +\infty f(x)$

10.- Para f(x) = $\frac{2x^2}{(x-3)^2}$ .Hallar:

10.1.- $x \xrightarrow{Lim} 3^- f(x)$ 10.2.- $x \xrightarrow{Lim} 3^+ f(x)$ 10.3. $x \xrightarrow{Lim} 3 f(x)$

10.4.- $x \xrightarrow{Lim} -\infty f(x)$ 10.4.- $x \xrightarrow{Lim} \infty f(x)$

11.- Sea f(x) = $\frac{x+|x|}{\sqrt{|x|}}, para, x \neq 0$ .Es posible definir f en 0 para que esta sea continua en $\Re$?

12.- Grafique la función Y = x+$\frac{|x-3|}{x-3}$.¿Es posible definir f en 3 para que esta sea continua en $\Re$

13.- Sean a,b números reales y f una función de $\Re$ en $\Re$ tal que :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4ax^2 - 5bx + 4, si, x > -1 \\ 2., six = -1 \\ x^2 - ax - 2b, six > -1 \end{cases}$$

Determine a y b para los cuales f es continua en x=-1