Guía Conceptual de Álgebra
Tema: Álgebra de Matrices.
Montoya

Guía Conceptual de Álgebra
Tema: Álgebra de Matrices.
Montoya

Matrices: Una ordenación de números dispuestos en filas y columnas, encerrados entre corchetes

Ejemplos: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Verifican ciertas reglas o algebra, denominada algebra de matrices.la matriz representa en general los coeficientes de un sistema de ecuaciones homogéneo

Para las matrices del ejemplo serán: 2x+3y+7z=0

x-y+5z=0.mas adelante veremos como se aplican las matrices a la resolución de estos sistemas.

En general una matriz de m filas y n columnas se representa por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada: cuando m=n

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden n,

Diagonal principal de una matriz cuadrada, es la línea formada por todos los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots \dots . a_{nn}$

Traza de una matriz cuadrada de orden n, es la suma de los elementos de la forma: $a_{11}, a_{22}, \dots \dots . a_{nn}$,es decir: $a_{11} + a_{22} + \cdots \dots . + a_{nn}$

Igualdad de matrices: A=B, si y solo si: tienen el mismo orden y $\forall a_{ij}\, \epsilon A$; $\forall b_{ij}\, \epsilon B$ entonces $a_{ij} = b_{ij}$

En otras palabras una matriz es una copia idéntica de la otra.

Matriz nula: si$\boldsymbol{M_{mn}} = 0 \iff a_{ij} = 0 \; \forall a_{ij} \, \epsilon M$

Adición o suma de matrices: si $\boldsymbol{A_{mn}}$, $\boldsymbol{B_{mn}}$ $son\ dos\ matrices\ del\ mismo\ orden$, entonces:

$A_{mn} + B_{mn} = \left(a_{ij} + b_{ij}\ \right)$, $(\sum a_{1n} + b_{n1})$

Dos matrices del mismo orden se denominan conformes respecto de la suma o resta.

Producto de un escalar por una matriz: Si A_{mn} y K es un escalar entonces$A_{mn} = \left(Ka_{ij}\ \right) \forall a_{ij} \, \epsilon A$

Matriz opuesta (-A): Si A_{mn} y K=-1 , entonces$-A_{mn} = \left(-a_{ij}\ \right) \forall a_{ij} \, \epsilon A$

Propiedades de las matrices del mismo orden: si A, B y C son matrices del mismo orden, entonces

1.- A+B=B+A conmutativa

2.- A+(B+C)=(A+B)+C , asociativa

3.- K(A+B)= KA+KB , K es un escalar.

4.- existe una matriz D, tal que A+D=B

Estas propiedades son consecuencia de las propiedades de la suma de números y polinomios del algebra elemental. De ellas se deduce también:

1.- las matrices del mismo orden, o conforme respecto a la suma o diferencia algebraica, obedecen las mismas leyes de la adición que los números o elementos que la componen.

Producto de matrices: si se tiene dos matrices $\boldsymbol{A_{mn}}$, $\boldsymbol{B_{mn}}$ **, entonces:**

A_{mn} , $B_{np} = (\sum a_{1n} + b_{n1})_{mp}$, $\forall a_{ij} \, \epsilon A$; $\forall b_{ij} \, \epsilon B$

El producto de A por B (en ese orden) es conforme.

Suponiendo que las matrices A,B y C son conformes respecto a la suma y al producto, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1.- A(B+C)=AB+AC , primera propiedad distributiva

2.-(A+B)C= AC+BC , segunda propiedad distributiva

3.- A(BC)=(AB)C , propiedad asociativa.

Sin embargo:

1.- $A \neq$B en lo general

2.- AB=0 , no implica necesariamente que A=0 o B=0

3.- AC=BC , no implica necesariamente que A=B

Matrices especiales:

Matriz fila: consta de una sola fila y n columnas: $A_{1n} = (a_{11}, a_{12}, \dots \dots . a_{1n})$

Matriz columna: consta de m filas y una sola columna: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{\ 21} \\ \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Matriz triangular superior: es una matriz cuadrad tal que $a_{ij} = 0 \ cuando \ i > j$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior: es una matriz cuadrad tal que $a_{ij} = 0 \ cuando \ i < j$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: cuando es triangular superior e inferior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si en esta matriz diagonal se verifica que: $\boldsymbol{a_{11} = a_{22} =, \dots \dots . = a_{nn}}$, se denomina matriz escalar

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Si en la matriz escalar K=1, se denomina matriz unitaria:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para **matrices conformes con el producto, se verifica que AI=IA**

Casos particulares de matrices cuadradas, si dos matrices son cuadradas y verifican que AB=BA, dichas matrices se denominan permutables, o conmutativas.

En las condiciones anteriores si dos matrices cuadradas verifican que AB=-BA, las matrices se denominan matrices anti permutables o anti conmutativas.

Matriz periódica: es una matriz cuadrada tal $A^{k+1} = A$, siendo k un numero entero y positivo , cuando k es el menor número entero para el cual se verifica la condición de igualdad , entonces la matriz se denomina matriz de periodo k.

Matriz idempotente: cuando en las condiciones anteriores, se verifica para k=1 , es decir $A^2 = A$

Matriz nilpotente: es una matriz cuadrada tal $A^p = 0$, siendo p un numero entero y positivo , cuando p es el menor numero entero para el cual se verifica la condición, la matriz se denomina nilpotente de orden p.

Matriz inversa. Si A y B son dos matrices cuadradas y conformes respecto del producto, entonces si se verifica que AB=BA=I, entonces cada una de ellas es inversa de la otra, se escribe: $A^{-1} = B \ o \ bien \ B^{-1} = A$

Para el algebra de matrices se verifica la ley de Morgan:

$$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$$

Matriz involutiva: es una matriz cuadrada tal $A^2 = I$. Una matriz unidad es involutiva . la inversa de una **matriz involutiva** es ella misma.

Matriz transpuesta.se obtiene intercambiando las filas por columnas , esto es:

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, entonces $\quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Si A es un matriz y k es un escalar, se deduce que

1.-$(A^t)^t = A$

2.- $(KA)^t = KA^t$

3.-$(A + B)^t = A^t + B^t$

4.- $(AB)^t = B^t A^t$

Matriz simétrica: es una matriz cuadrada tal que : $A^t = A$.Por lo tanto una matriz simétrica verifica que : $a_{ij} = a_{ji}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, es simétrica y también KA , para cualquier escalar K.

Si A es una matriz cuadrada de orden n , la matriz que resulta de la suma : A+A^t , es simétrica.

Matriz hemisimétrica o antisimétrica: es una matriz cuadrada de orden n , tal que $A^t = -A$

Evidentemente los elementos de la diagonal principal de una matriz hemisimétrica deben ser nulos.

Ejemplo, $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, es una matriz hemisimétrica, y también lo es KA, cualquiera sea el escalar K

Teorema. Si A es una matriz cuadrada y A^t su transpuesta, entonces A-A^t es hemisimétrica.

Teorema: toda matriz A, se puede descomponer en una matriz simétrica de la forma: $\frac{1}{2}(A + A^t)$ y otra **hemisimétrica de la forma** $\boldsymbol{\frac{1}{2}(A - A^t)}$

Matriz conjugada: si Z=a+bi, representa un número complejo y $\bar{z} = a - bi$, su conjugado.

Entonces la matriz conjugada de A es aquella que resulta de sustituir cada uno de los elementos de A por los correspondientes conjugados. Se representa por $\bar{A}$

Ejemplo si A=$\begin{pmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{pmatrix}$ entonces $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{pmatrix}$

Propiedades, Si $\boldsymbol{\bar{A}}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{\bar{B}}$ son respectivamente las matrices conjugadas de A y B y K un escalar cualquiera ; es estas condiciones se deduce que:

1.- $\bar{\bar{A}}$=A 2.- $\overline{KA} = \bar{K}\bar{A}$

Teniendo en cuenta estas dos últimas identidades se puede demostrar que:

1.- $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$, la conjugada de la suma es la suma de la conjugada

2.- $\bar{A}\bar{B}$=$\overline{(AB)}$. la conjugada del producto equivale al producto de la conjugada.

3.-$(\bar{A})^t = \overline{(A^t)}$, la transpuesta de la conjugada es la conjugada de la transpuesta.(Matriz adjunta en sentido hermítico)

Matriz hermítica: Una matriz cuadrada A= (a_{ij}), tal que $\overline{(A^t)}$ =A , se denomina hermítica o autoadjunta. Por lo tanto, A será hermítica siempre que: $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todos los valores de i y de j . Evidentemente los elementos de la diagonal principal de una matriz hermítica han de ser números reales.

Ejemplo, la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}$ es hermítica.

Matriz hemihermítica o antihermítica: . Toda matriz cuadrada que verifica: $\overline{(A^t)}$=-A

Todos los elementos de la diagonal principal de una matriz hemihermítica, deben ser nulos o números imaginarios puros.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & -i & 0 \end{pmatrix}$, es hemihermítica.

Inversa de una Matriz

MATRIZ INVERSA: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n de forma que AB = BA = I; en estas condiciones, B es la matriz inversa de A,(B = A^{-1}), y recíprocamente, A es la inversa de B, (A = B^{-1})

En el problema 1 se demuestra el teorema siguiente:

I La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A posea inversa es que sea regular.

La inversa de una matriz regular de orden n es única.

II Sea A una matriz singular: la igualdad AB = AC implica que B = C

LA INVERSA de una matriz diagonal regular, diag.(k_1, k_2 , … k_n) , es la matriz diagonal diag. (1/k_1, 1/k_2, …. , 1/k_n)

SI $A_1, A_2, \ldots, A_s$) es

Diag. (A_1^{-1}, A_2^{-1}, … , A_s^{-1}

Más adelante veremos los métodos para calcular la inversa de una matriz regular

INVERSA DE LA MATRIZ DE LOS ADJUNTOS De (6.2) se deduce, A adj A = $|A| \cdot$ I , Si A es una matriz regular

$$A^{-1} = \frac{adj\,A}{|A|} = \begin{matrix} \frac{a_{11}}{|A|} & \frac{a_{21}}{|A|} \cdots & \frac{a_{n1}}{|A|} \\ \frac{a_{12}}{|A|} & \frac{a_{22}}{|A|} \cdots & \frac{a_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

Ejemplo 1 La matriz de los adjuntos de A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ es $\begin{vmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Ahora bien, $|A|$ = -2 luego $A^{-1} = \frac{adj\,A}{|A|} = \begin{vmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{vmatrix}$

INVERSA DE LAS MATRICES ELEMENTALES Supongamos que se reduce la matriz cuadrada y regular A a la matriz I, mediante transformaciones elementales, de manera que

$H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_1$ = PAQ = 1

Como A = $P^{-1} \cdot Q^{-1}$, según (5.5), y $(B^{-1})^{-1}$ = B, resulta

$A^{-1} = (P^{-1} \cdot Q^{-1})^{-1}$ = Q · P = $K_1 \cdot K_2 \ldots K_t \cdot K_s \ldots K_2 \cdot K_1$

Ejemplo 2 :

$$H_2H_1\, A\, K_1K_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot A \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

Por tanto,

$$A^{-1} = K_1K_2H_2H_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Anteriormente se demostró que una matriz regular se podía reducir a forma normal aplicando, únicamente, transformaciones de fila. Haciendo Q 0 I, se deduce:

A^{-1} = P = $H_s \ldots H_2 \cdot H_1$

Es decir:

III Si la matriz A se reduce a la matriz I mediante una sucesión de transformaciones de fila, la matriz inversa, A^{-1}, es igual al producto en orden contrario de las correspondientes matrices elementales.

Ejemplo 3 Hallar la matriz inversa de la matriz A = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ del Ejemplo 2, aplicando únicamente transformaciones de fila para reducir A a I

Escribiendo la matriz $|AI_3|$ y efectuando las transformaciones de la fila que reducen A a I_3

…………………………………………………………….. …………………………………………………

Matriz de los adjuntos de de una matriz cuadrada.

Matriz adjunta. (En sentido hermítico) , sea A= A=(a_{ij}), una matriz cuadrada de orden n y α_{ij}
El adjunto (menor complemento con su signo) del elemento a_{ij}; por definición:

Adjunta de A= $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} \vdots & \alpha_{22} \ddots & \alpha_{n1} \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

Se observa que los elementos de la fila (columna) i de A son los elementos de la columna (fila) i de la matriz adjunta A

Ejemplo:

En la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\alpha_{11} = 6$; $\alpha_{12} = -2$; $\alpha_{13} = -3$; $\alpha_{21} = 1$; $\alpha_{22} = -5$; $\alpha_{23} = 3$; $\alpha_{31} = -5$; $\alpha_{32} = 4$; $\alpha_{33} = -1$

Luego la adj A= $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Aplicando los teoremas de matrices pertinentes, se obtiene:

A (adjA)= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \vdots & a_{22} \ddots & a_{2n} \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} \vdots & \alpha_{22} \ddots & \alpha_{n1} \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$=Diag ($|A|$, $|A|$, $|A|$, … … . . , $|A|$)

En la matriz del ejemplo:

$|A| = -7$, luego:

A (adjA)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -7I$

Se puede establecer que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}}{|A|} & \frac{\alpha_{21}}{|A|} \cdots & \frac{\alpha_{n1}}{|A|} \\ \frac{\alpha_{12}}{|A|} \vdots & \frac{\alpha_{22}}{|A|} \ddots & \frac{\alpha_{n2}}{|A|} \vdots \\ \frac{\alpha_{1n}}{|A|} & \cdots \frac{\alpha_{2n}}{|A|} & \frac{\alpha_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Tomando determinantes, se puede establecer que:

$$|A||adj\ A| = |A|^n = |adj\ A||A|$$

Por lo tanto:

1.- Si A es una matriz cuadrada regular de orden n , se tiene que :

$$|adj\ A| = |A|^{n-1}$$

2.- Si A es una matriz cuadrada regular,
A (adj A) = (adj A)A =0 .

Matriz inversa: sean A y B dos matrices cuadradas de orden n de forma que AB=BA=I; en estas condiciones. B es la matriz inversa de A, y recíprocamente, A es inversa de B. $A = B^{-1}\ y\ \ B = A^{-1}$)

Teorema : la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A posea inversa es que sea regular.
La inversa de una matriz regular n es única
Teorema: si A es una matriz singular, la igualdad AB=AC , implica que B=C

La inversa de una matriz diagonal regular, diagonal=($K_1, K_2, \dots \dots . K_n$), es la matriz diagonal:$\left(\frac{1}{K_1}, \frac{1}{K_1}, \dots \dots . . \frac{1}{K_n}\right)$

Problemas Resueltos

1.- Puesto que $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mm}b_{m1} & \cdots & a_{mm}b_{mn} \end{pmatrix}$, el producto AB de una matriz diagonal cuadrada de orden m, A = diag(a_{11},a_{22} ,… , a_{mm}) por otra cualquiera B de orden m x n se obtiene multiplicando la primera fila de B por a_{11},la segunda B por a_{22},y así sucesivamente.

2.- Demostrar que las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ y$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ son permutables para todos los valores de a, b, c, d

Esto se deduce de $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$

3.- Demostrar que $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ es una matriz idempotente

$$A^2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

4.- Demostrar que si AB= A y BA = B, las matrices A y B son idempotentes

ABA= (AB) A = A · A = A^2 y ABA = A (BA) = AB = A; luego A^2 = A y A es idempotente. Aplicar B A B para demostrar que B es idempotente.

5.- Demostrar que A = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ es un matriz nilpotente de orden 3

A^2 = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ y

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

6.- Su A es una matriz nilpotente de índice 2, demostrar que $A(\mathrm{I} \pm \mathrm{A})^n$ = A, siendo n un entero positivo cualquiera

Puesto que $A^2 = 0, A^3 = A^4 = \ldots = \mathrm{A^n} = 0$, se tiene $\mathrm{A}(\mathrm{I} \pm \mathrm{A})^n = \mathrm{A}(\mathrm{I} \pm \mathrm{nA}) = \mathrm{I} \pm \mathrm{nA}^2 = \mathrm{A}$

7.- Sean A, B, C tres matrices cuadradas de forma que AB = I y CA = I . En estas condiciones, (CA)B = C(AB) y , por tanto, B = C. En otra forma, B = C = A^{-1} es la única inversa de A. (¿ Cual es la B^{-1}?)

8.- Demostrar que: $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$

Por definición $(\mathrm{AB})^{-1}$ (AB) = (AB) $(\mathrm{AB})^{-1}$ = I, Ahora bien

$(\mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1})$ AB = B^{-1} (A^{-1} · A) B = B^{-1} · I · B = B^{-1} · B = I y

AB ($\mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$) = A(B · B^{-1}) A^{-1} = A · A^{-1} = I

Del Problema 7, $(\mathrm{AB})^{-1}$ es única; luego $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$

9.- Demostrar: La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea involutiva es que (I – A) (I + A) = 0

Supongamos (I – A) (I + A) = I - A^2 = 0; luego A^2 = I y A es involutiva

Supongamos que A es involuta; entonces A^2 = I y (I – A) (I + A) = I - A^2 = I – I = 0

10.- Demostrar que (A+B)’ = B’A’

11.- Demostrar que: (AB)’ = B’ A’

12.- Demostrar que: (ABC)’ = C’ B’ A’

13.- Demostrar que si A = $[\mathrm{a_{ij}}]$ es una matriz cuadrada, la matriz B = $[\mathrm{b_{ij}}]$ = A+ A’ es simétrica

14.- Demostrar que si A y B son dos matrices cuadradas simétricas de orden n, la condición necesaria y suficiente para que AB sea simétrica es que A y B conmuten

15.- Demostrar que si una matriz cuadrada A de orden m es simétrica (hemisimétrica) y que si P es de orden m x n, B = P' AP es otra matriz simétrica (hemisimétrica)

16.- Demostrar que si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, la condición necesaria y suficiente para que A y B sean permutables es que A –k I y B – k I conmuten para cualquier valor del escalar k

PROBLEMAS PROPUESTOS

17.- Demostrar que el producto de dos matrices triangulares superiores (inferiores) es otra matriz triangular superior (inferior)

18.- Deducir una fórmula para hallar el producto BA de una matriz B de orden m x n por otra

A = diag. (a_{11}, a_{22} … , a_{nn})

19.- Demostrar que la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a k se puede representar por K I , y que k IA = diag.(k,k …..,k) A, siendo el orden de I igual al número de filas de A

20.- Si A es una matriz cuadrada, demostrar que $A^p \cdot A^q$ = $A^q \cdot A^p$

21.- Demostrar que las matrices A = $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$ y B = $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ son idempotentes

22.- Si A es una matriz idempotente, demostrar que también lo es la matriz B = I – A, y que AB = BA = 0

23.- Si A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, demostrar que A^2 – 4ª – 5I = 0

24.- Demostrar que $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^4$ = I

25.- Demostrar que A = $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ es una matriz periódica de periodo 2

26.- Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$ es una matriz nilpotente

27.- Demostrar que A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ y B = $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ son matrices permutables

28.- Demostrar que A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ y B = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ no conmutan y que $(a + B)^2$ = A^2 + B^2

29.- Demostrar que las matrices $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ son, dos a dos, anti conmutativas

30.- Hallar todas las matrices permutables con la matriz diag.(1,2,3)

Hallar todas las matrices que conmutan con la matriz diag.(a_{11}, a_{22} … , a_{nn})