Conceptos previos .

Charles Hermite (1822-1901); matemático francés, fue profesor en la facultad de ciencias de Paris. Realizó investigaciones sobre la teoría de las formas algebraicas y de los números algebraicos. Investigo la teoría general de las ecuaciones algebraicas y descubrió la ley de reciprocidad que lleva su nombre.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES. Se abordan aquí los sistemas lineales cualquiera como complemento a lo estudiado respecto de los determinantes.

El método busca una manera sencilla y sistemática de resolver sistemas con cualquier número de incógnitas

Una ecuación lineal tiene la forma:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$

Un conjunto de ecuaciones lineales, tales como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se llama sistema de ecuaciones lineales (en este caso, de m ecuaciones con n incógnitas)

Una solución de un sistema lineal es un conjunto de n números $s_1, s_2 \dots s_n$, tales que al sustituirlos en las incógnitas $x_1, x_2 \dots\dots x_n$, respectivamente originan m identidades.

Descripción del método de Gauss:

El sistema de m ecuaciones y n incógnitas: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Puede escribirse en forma abreviada de la forma:

$$\left(\begin{array}{l|l} a_{11}.a_{12}\dots\dots a_{1n}\dots & b_1 \\ a_{21}.a_{22}\dots\dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ & \\ a_{m1}.a_{m2}\dots\dots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo: La matriz correspondiente al sistema: 5x+2y-3z=51
4x+7y+5z=53
6x+8y =3 es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 51 \\ 4 & 7 & 5 & 53 \\ 6 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$, diremos que un sistema de ecuaciones lineales es triangular si todos los coeficientes situados por debajo de la diagonal principal son nulos.

El método de Gauss para la resolución de sistemas lineales consiste en transformar un sistema en otro equivalente con forma triangular, cuya resolución es sencilla .Para ello se mantiene invariable la primera ecuación y se sustituyen las siguientes ecuaciones por las que resultan de eliminar la primera incógnita entre la primera ecuación y cada una de las restantes. El proceso se continúa hasta obtener una matriz triangular asociada al sistema.

Ejemplo: x+y+z=3
X+2y+3z=2
X+4y+9z=2

Cuya matriz del sistema es : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Restado la segunda y tercera fila y escribiendo el resultado en la tercera fila ,tenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$,restando la primera fila con la segunda fila y escribiendo el resultado en la segunda fila tenemos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, ahora multiplicamos la segunda fila por -2 y lo sumamos a la tercera fila y anotamos el resultado en la tercera fila se tiene: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Así hemos obtenido un sistema triangular donde: x+y+z=3
-Y-2z=1
-2z=-2 ¡que ya es mas fácil de resolver!z=1, y=-3, x=5

Observación: Si después de triangulizar se obtiene un sistema de la forma 0=c el sistema es INCOMPATIBLE y se termina la discusión del tema.

*Si no es así el sistema es compatible .En este caso llamamos r al número de ecuaciones no triviales (distintas de 0=0) que tiene el sistema en forma triangular, distinguiremos:

1.- Si r=n, hay una única solución, es un sistema determinado.

2.-Si r<n, el sistema tiene infinitas soluciones que dependen de n-r parámetros (es un sistema INDETERMINADO)

EJERCICIOS PROPUESTOS: Resuelva por el método de Gauss

1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ x-y-3z=-10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x-y+z=7 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y+z=4 \\ 2x+2y-z=-4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+y-3z=-1 \\ x-3y-2z=-12 \\ 3x-2y-z=-5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 6x-2y-z=-14 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x-2y+z=24 \\ 2x+5y-z=-14 \\ x-4y+3z=26 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3z-5x=10 \\ 5x-3y=-7 \\ 3y-5z=-13 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x-2y=0 \\ y-2z=5 \\ x+y+z=8 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 5x-3z=2 \\ 2z-y=5 \\ x+2y-4z=8 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+y+z+u=4 \\ X+2y+3z-u=-1 \\ 3x+4y+2z+u=-5 \\ X+4y+3z-u=-7 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+y+z+u=10 \\ 2x-y-2z+2u=2 \\ x-2y+3z-u=2 \\ x+2y-4z+2u=1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x-2y+z+3u=-3 \\ 3x+y-4z-2u=7 \\ 2x+2y-z-u=1 \\ x+4y+2z-5u=12 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+2y+z=-4 \\ 2x+3y+4z=-2 \\ 3x+y+z+u=4 \\ 6x+3y-z+u=3 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ x+y+u=-3 \\ 3x-2y-u=-7 \\ 4x+5y+6z+3u=11 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x-3z-u=2 \\ 3y-2z-5u=3 \\ 4y-3u=2 \\ x-3y+3u=0 \end{cases}$

16) Resuelva los problemas por el método de Gauss:

16.1.- La suma de tres números es 37 .El menor disminuido en 1 equivale a la tercera parte de la suma del mayor y el mediano; la diferencia entre el mediano y el menor equivale al mayor disminuido en 13.Hallar el numero.

16.2.- La suma de las tres cifras de un numero es 15 .La suma de la cifras de las centenas con la cifra de las decenas es los 3/2 de la cifra de las unidades, si al numero se le resta 99, las cifras se invierten .Hallar el numero.

16.3.- La suma de las tres cifras de un numero es 6 .Si el numero se divide por la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas, el cociente es 41, y si al numero se añade 198, las cifras se invierten. Hallar el número.

16.4.- La suma de los tres ángulos de un triangulo es 180º.La suma del mayor y el mediano es 135º, y la suma del mediano y el menor es 110º.Hallar los ángulos.

16.5.- Si Augusto le da un lingote de oro a Lucía ,ambos tienen lo mismo ;Si Antonio tuviera un lingote menos , tendría lo mismo que Lucia ,y si Augusto tuviera 5 lingotes más tendría tanto como el doble de lo que tiene Lucia .¿Cuántos lingotes tiene cada uno?

16.6.- Un “Jote” ,volando a favor del viento recorre 55 km en una hora ,y en contra del viento 25 km en una hora .Hallar la velocidad en km/h del “Jote” en aire tranquilo y la velocidad del viento.